COMPREENDENDO A MATERIALIDADE GEOMÉTRICA E ALGÉBRICA DA PARÁBOLA A PARTIR DE UM CORTE FEITO EM UM CONE DE ISOPOR

Ezequias Adolfo Domingas Cassela 1[1]
Escola Superior Pedagógica do Bié – ESPE-Bié

Resumo
O presente trabalho procura compreender a parábola em sua materialidade geométrica e algébrica a partir de um corte com uma faca em um cone de isopor, com vista à contribuição para a formação de diferentes personalidades que sejam ativas, independentes, criativas e comprometidas com o que acontece no seu contexto. A sua linha de pensamento subjaze em um corpus de conhecimento defendido pela Teoria da Objetivação (TO) de Luís Radford. Foi desenvolvido com base em uma pesquisa qualitativa com enfoque em um estudo com propósitos didáticos, em que o professor faz de sua prática um objeto de sua pesquisa. Os resultados obtidos nos ajudam a saber que uma compreensão da parábola em sua materialidade geométrica e algébrica passa pela promoção de um estudo articulado entre a perspectiva da Geometria sintética e a analítica. E que um estudo promovido nessa direção ampliaria as habilidades dos alunos sem pautarem por um estudo mediante a memorização de fórmulas prontas e acabadas.
Palavras-chave: Estudo da parábola; Geometria sintética; Geometria analítica.

1. INTRODUÇÃO

Durante uma pesquisa realizada no contexto dos alunos da Escola Superior Pedagógica do Bié em Angola, no âmbito da elaboração da dissertação de mestrado do autor deste trabalho, apresentada e defendida na Universidade da Beira Interior, Portugal, em 2018, constatou-se um rol imenso de queixas, relativamente a incapacidade dos alunos na resolução de problemas geométricos que fogem do padrão normal utilizado em sala de aulas, fundamentalmente na disciplina de Geometria Analítica, no tema relacionado com as cônicas (Cassela; De Nascimento, 2020). Entre outras situações, uma das razões apontadas tem a ver com o fato de os alunos sedimentarem os seus conhecimentos nessa disciplina mediante o uso de fórmulas dadas de forma pronta e acabada, adquiridos de uma forma isolada das experiências cotidianas, o que tem dificultado a aplicação desses conhecimentos em situações reais.

Por outro lado, os alunos apresentaram dificuldades em dar explicações acerca da origem do nome "curvas cônicas"; das principais propriedades que justificam a razão

[1]Mestre em Matemática para Professores pela Universidade da Beira Interior, Portugal (UBI). Professor da Escola Superior Pedagógica do Bié (ESPE-Bié), Cuito, Bié, Angola. E-mail: ezequiasadolfo@hotmail.com

delas serem consideradas lugares geométricos; da sua definição na vertente sintética e analítica, bem como as explicações que giram em torno das propriedades a partir das quais obtém-se as suas equações (Cassela, 2018). Esse fato despertou a preocupação do autor deste trabalho, enquanto professor dessa disciplina, motivando-o em repensar a sua prática pedagógica, no sentido de pautar pelo desenvolvimento de experiências cotidianas que estimulam a pensar a Geometria Analítica na perspectiva de explicá-la, conhecê-la e conviver com ela dentro da realidade de um determinado contexto específico. Trata-se de um pensamento sustentado na prática espontânea e natural, estimulando a criatividade e a descoberta.

Face ao exposto, considerei que um dos aspetos que se deve julgar pertinente para o estudo dessa disciplina a partir de atividades cotidianas passa pela necessidade de a compreendermos como uma obra humana e que seus conceitos, princípios e leis se desenvolveram ao longo da história mediante atividades práticas do cotidiano. Um exemplo para esse fato está relacionado com os estudos realizados pelos gregos clássicos na compreensão de uma classe de curvas a que chamaram de seções cônicas, por serem originalmente obtidas cortando um cone com um plano. As curvas daí resultantes, a parábola, a elipse e a hipérbole, foram estudadas por Euclides, mas também mais tarde por outro geómetra grego, Apolônio, que escreveu um tratado exaustivo sobre estas curvas. A sua contribuição principal foi o fato de ter conseguido gerar todas as cônicas de um único cone de duas folhas, simplesmente variando a inclinação do plano de interseção (Boyer, 2003).

Diante deste ponto de vista, dentre as três curvas estudadas, escolhi apresentar um estudo relacionado com a parábola, a partir da qual considera-se a seguinte pergunta diretriz: *como compreender a parábola em sua materialidade geométrica e algébrica a partir de uma experiência cotidiana?* Para tal, o presente trabalho procura compreender a parábola em sua materialidade geométrica e algébrica a partir de um corte com uma faca em um cone de isopor, com vista a contribuição para a formação de diferentes personalidades que sejam ativas, independentes, criativas e comprometidas com o que acontece no seu contexto. Nessa direção, apresenta-se inicialmente um enquadramento teórico do estudo, seguido da metodologia. Na sequência, apresenta-se o estudo da parábola motivada pelo corte de um cone de isopor e, finalmente, as considerações finais.

2. ENQUADRAMENTO TEÓRICO DO ESTUDO

A linha de pensamento do presente estudo subjaze em um corpus de conhecimento defendido pela Teoria da Objetivação (TO), a qual foi desenvolvida pelo Professor Dr.

Luís Radford, titular na *Laurentian University* em Ontário, Canadá, e concebida como uma teoria de ensino e aprendizagem em uma dimensão teórico-metodológica que fundamenta as suas bases epistêmicas no materialismo dialético, nas ideias de Paulo Freire e no enfoque histórico-cultural de Vygotsky, bem como nas ideias filosóficas de Hegel, Luria e Leontiev. Ela defende uma prática docente baseada na interação coletiva inerente aos saberes constituídos histórica e culturalmente em que envolve tanto o *conhecer* quanto o vir a *ser* (Radford, 2021).

Ela mostrou-se pertinente para esse estudo por ser uma teoria que se enquadra no projeto educacional que procura afirmar os seres humanos como consubstancias à cultura nas quais eles vivem suas vidas. Em linhas gerais, essa teoria defende que a cultura exerce uma forte influência nas formas como os indivíduos pensam, fazem, sentem, imaginam, esperam e sonham (Radford, 2021). Por outro lado, por ser uma Teoria que estimula o professor a questionar, ressignificar e modificar a sua própria prática em uma dimensão interacionista, uma vez que nem o professor nem o aluno são dados como autossuficientes ou como prontos e acabados no processo, ambos aprendem juntos e superam situações, caminham juntos em busca de si próprios, empenhados juntos em um mesmo esforço onde sofrem, lutam e encontram prazer e realização conjuntamente (Radford, 2021). Esse pensamento está em conformidade com a afirmação de Freire (1979, p. 27). quando diz:

> Somos educáveis porque nossa existência é marcada pela incompletude e pela abertura, traços fundamentais da "singularidade humana". Como bem ressalta o autor, a educação não teria sentido se o ser humano fosse "um ser acabado", sem precisar estar na "busca constante de ser mais", pois é nesse inacabamento e na necessidade dessa busca que reside a "raiz da educação" em seu sentido mais específico.

Essa linha argumentativa torna a sala de aula em um espaço de possibilidades onde o professor e os alunos trocam mutuamente experiências para a promoção de aprendizagens autônomas de forma crítica e cidadã.

3. CAMINHO METODOLÓGICO

Esse estudo é resultado de uma pesquisa qualitativa com enfoque em uma pesquisa com propósitos didáticos (De André, 1995), em que o professor faz de sua prática um objeto de sua pesquisa, com o objetivo de assumir um papel ativo no seu próprio processo, buscando incorporar uma postura investigativa que o permite acompanhar a sua própria prática profissional, no sentido de questionar, problematizar e modificar.

Nesse sentido, durante o processo, o professor identificou algumas lacunas na aprendizagem das curvas cônicas, pela incapacidade que os alunos tinham de dar explicações articuladas entre essas curvas do ponto de vista da Geometria sintética e da analítica. Esse fato o levou a pautar por uma experiencia cotidiana que motivou um estudo mais aprofundado dessas curvas. O referido estudo foi conduzido mediante a aplicação de uma atividade à 10 alunos do primeiro ano do curso de formação de professores de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié em Angola. Dita atividade foi realizada em forma de labor conjunto, na qual os alunos e o professor trabalharam *lado a lado*, discutindo, aprendendo juntos e superando limitações com vista a construção de um conhecimento relativo ao tema em tela. A atividade foi proposta no sentido de dar resposta à uma questão que procurava compreender a materialidade geométrica e algébrica da parábola a partir de uma experiência cotidiana.

4. ESTUDO DA PARÁBOLA MOTIVADO PELO CORTE DE UM CONE DE ISOPOR

Inspirado nas experiências práticas de Apolônio, usei um dos espaços da casa para buscar resposta acerca da seguinte questão: como promover uma aprendizagem das cônicas que permita o desenvolvimento de habilidades de visualização, identificação e classificação sem a dependência de fórmulas prontas e acabadas? Nesse sentido, fiz três cortes em um cone de isopor com uma faca variando a sua inclinação, obtendo desse modo três seções cônicas cujos contornos nos remetem à circunferência, à elipse e à parábola. Mas, para este estudo, vamos nos ater simplesmente na parábola.

Para a obtenção dessa seção, fiz um corte no cone de isopor com uma faca posicionada de forma oblíqua paralela a uma das geratrizes do cone, tal como se constata na Figura 1.

Figura 1 – Curva resultante de um corte feito com uma faca em um cone de isopor.

No dia seguinte, levei os referidos cortes em uma sala de aulas dos alunos do primeiro ano do curso de formação de professores de Matemática da Escola Superior Pedagógica do Bié para serem alvos de um estudo conjunto entre alunos e professor. Incialmente, solicitei aos alunos para observarem os cortes.

Para o caso da curva em estudo, coloquei a seguinte questão: *como compreender a materialidade geométrica e algébrica da parábola a partir dessa experiência?* Incialmente, os alunos consideraram ser uma atividade complexa e afirmaram que precisariam de tempo suficiente que lhes permitissem considerar o máximo de possibilidades. Na sequência, tranquilizei-os, e afirmei que trabalharíamos juntos para encontrarmos uma resposta possível para a questão colocada.

Continuando, um dos alunos manifestou uma ideia: para trabalharmos *sobre*, precisamos ter a certeza de que o contorno da seção obtida é uma parábola. Nós todos concordamos, por isso os alunos usaram os seus conhecimentos aprendidos nas aulas anteriores para traçarem uma parábola e, em seguida, pintaram a seção plana obtida com uma caneta hidrocor e a carimbaram na folha. O rigor explícito na curva nos levou a confirmar que o contorno da curva era realmente uma parábola.

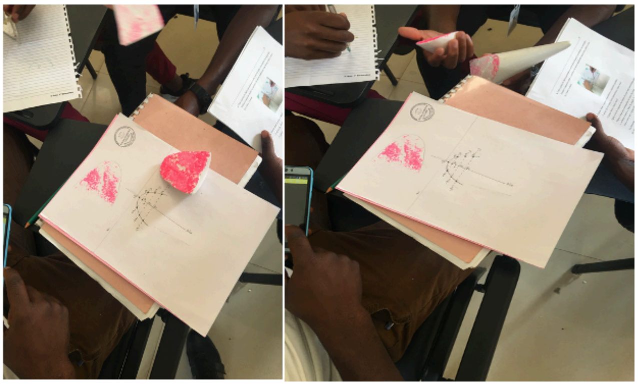

Figura 2 – Compreensões dos alunos em torno da materialidade geométrica e algébrica da curva obtida.

Na sequência, os alunos pediram para explicar mais uma vez o procedimento usado para obtenção da seção plana que o professor teve em conta em sua experiência. Nessa perspectiva, depois da discussão, chegamos à conclusão de que tal procedimento nos remeteria à uma outra definição da parábola em sua materialidade geométrica diferente da que estávamos acostumados, porque até ao momento só estudávamos a parábola na perspectiva da Geometria Analítica. Assim, obteve-se o seguinte registro:

Definição: a parábola é a curva que resulta da interseção de um cone com um plano paralelo a uma das suas geratrizes.

Em continuação, deu-se um tempo para todos pesquisarmos e discutirmos sobre as diferentes premissas que estão relacionadas com a experiência em causa. Como resultado, estudamos alguns resultados obtidos por Dandelin sobre as esferas inseridas no cone para possíveis pontos de tangencias e trabalhamos sobre a seguinte preposição:

Preposição: *considere-se um cone circular reto e um plano π paralelo a uma das suas geratrizes que o intersecta obliquamente. Assumimos que existe uma esfera que tangencia simultaneamente o plano π e o cone (ver Figura 1). Seja também o plano θ ortogonal ao eixo do cone que contém a circunferência c de tangência da esfera com todas as geratrizes do cone. Se F é o ponto de interseção da esfera com o plano π, c a circunferência de tangência entre a esfera e o cone e l a reta resultante da interseção entre o plano de corte (π) e o plano θ ortogonal ao eixo do cone, que contém a circunferência c, então qualquer ponto P da interseção do cone com o plano de corte é tal que:*

$$d(P,F) = d(P,l)$$

Depois de alguns dias de discussão sobre a preposição e sobre os antecedentes históricos do estudo da parábola, concluímos que seguindo o passo-a-passo da experiência realizada é possível demonstrarmos a referida preposição. Assim, depois da discussão e trabalho conjunto, registou-se:

Demonstração:

Consideremos um cone reto de vértice V e um plano π paralelo a uma das suas geratrizes que o intersecta obliquamente.

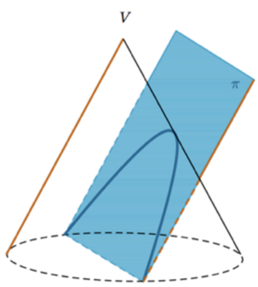

Figura 3 – Assumindo a materialidade geométrica da curva obtida.

Seja S uma esfera de Dandelin inscrita no cone e tangente ao plano π no ponto F .

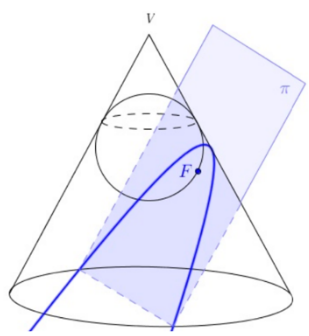

Figura 4 – esfera de Dandelin intersectando o plano de corte.

Seja também o plano θ ortogonal ao eixo do cone que contém a circunferência c de tangência da esfera com todas as geratrizes do cone. Os planos π e θ intersectam-se numa reta l, como mostra a Figura 5:

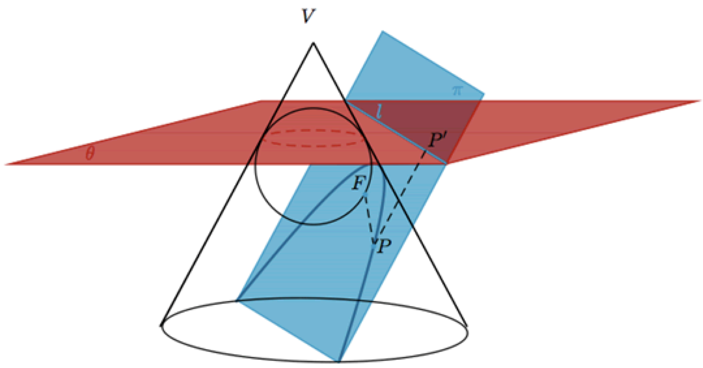

Figura 5 – Interseção entre os planos π e θ

Seja M o ponto de interseção da circunferência c com a geratriz do cone paralela ao plano π. Seja P um ponto qualquer da cônica e P' o pé da perpendicular à reta l passando por P. Seja R a interseção da circunferência c com a geratriz que contém P e t a reta paralela ao eixo do cone que passa pelo ponto P intersectando o plano θ em Q.

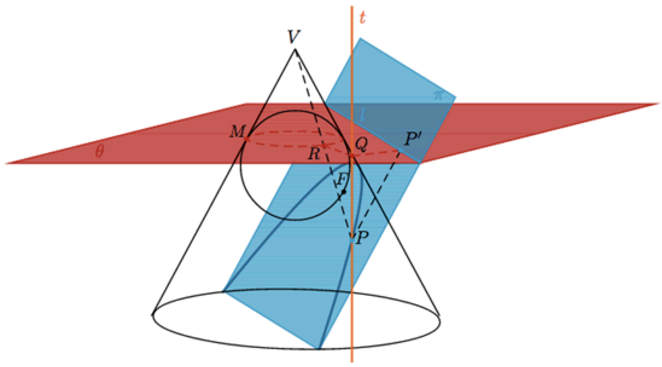

Figura 6 – Movimentações do ponto P em torno da curva

Pela propriedade das tangentes às circunferências, temos:

$$d(P,R) \ = \ d(P,F)$$

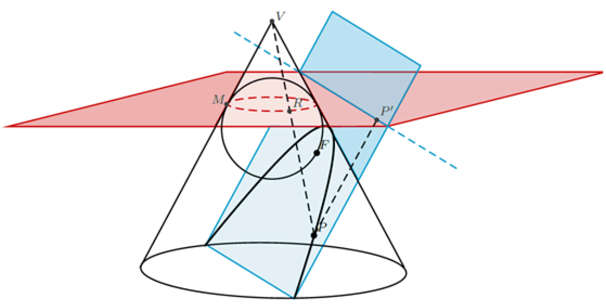

Figura 7 – equidistâncias entre o ponto P com respeito a F e a directriz

Seja O o ponto de interseção entre o eixo e o plano θ. Comparando o triângulo $\triangle\, VOR$ com o triângulo $\triangle\, PRQ$, tem-se que: o ângulo RPQ é congruente ao ângulo RVO entre o eixo e a geratriz, (alternos congruentes) pelo teorema das paralelas. E o ângulo VOM é congruente ao ângulo PQR, ambos são retângulos, como em dois triângulos dois ângulos congruentes subtendem um terceiro congruente, então, o ângulo PRQ é congruente ao ângulo VRO. Logo pelo critério AA (ângulo - ângulo) os triângulos $\triangle\, VOR$ e $\triangle\, PRQ$ são semelhantes.

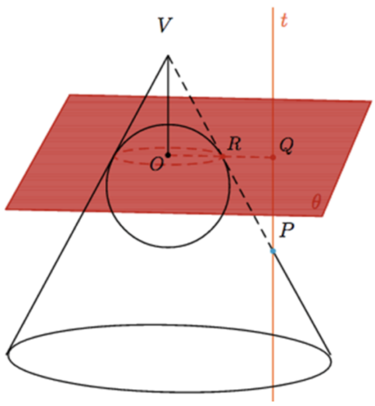

Figura 8 – Comparando triângulos (1)

Por outro lado, comparando os triângulos $\triangle\, VOM$ e $\triangle\, PQP'$, temos: O ângulo QPP' é congruente ao ângulo OVM entre o eixo e o plano de seção do cone e o ângulo PQP' é congruente ao ângulo VOM, ambos são retângulos, de modo análogo o ângulo VMO é congruente ao ângulo $PP'Q$, logo os triângulos $\triangle\, VOM$ e $\triangle\, PQP'$ são semelhantes.

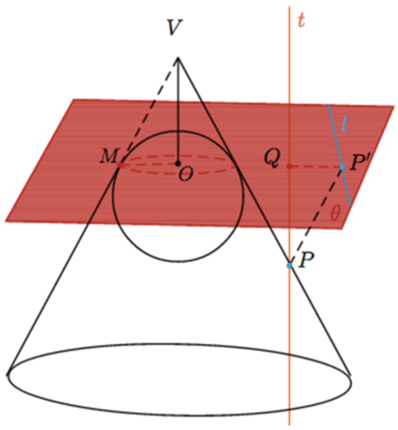

Figura 9 – Comparando triângulos (2)

Daí vem: O triângulo $\triangle\, PRQ$ é congruente ao triângulo $\triangle\, PQP'$, pois, além de terem um lado em comum, os ângulos $PP'Q$ e QPR são congruentes porque são bissectados pela reta t e os ângulos PQR e PQP' são congruentes, pois ambos são retângulos e consequentemente os ângulos PRQ e $PP'Q$ também são congruentes. Logo:

$$d(P,R) = d(P,P')$$

e como P' é o pé da perpendicular de P sobre a reta l, temos: $d(P,R) = d(P,l)$

e como $d(P,R) = d(P,F)$, temos:

$$d(P,F) = d(P,l)$$

o que quer dizer que:

$$d(P,F) = d(P,l)$$

O resultado obtido justifica a razão da parábola ser um lugar geométrico, onde cada ponto pertencente à curva tem igual distância com respeito a um ponto fixo chamado foco e uma reta fixa chamada diretriz. Essa relação é a ponte de ligação entre a Geometria sintética e a analítica (união entre sua materialidade geométrica e algébrica) no âmbito do estudo da parábola. O resultado encontrado serve de base para o tratamento algébrico do estudo da parábola com vista a obtenção das suas equações. Assim, a partir da igualdade obtida, podemos determinar essas equações da seguinte forma:

Sejam l a reta fixa e F o ponto fixo, consideremos um ponto $P = (x,y)$ pertencente a curva da parábola, e façamos a distância de P a l, tomada na perpendicular. Seja a a abcissa do vértice, assim, a reta l paralela ao eixo das ordenadas e perpendicular ao eixo das abcissas tem a seguinte equação:

$$l: x = x_v - a$$

Rescrevendo a igualdade anterior na seguinte forma:

$$d(P,l) = d(P,F)$$

E recorrendo à fórmula da distância entre dois pontos, temos:

$$\sqrt{[x-(x_v-a)]^2+(y-y_v)^2} = \sqrt{[x-(x_v+a)]^2+(y-y_v)^2}$$

Observa-se que a diretriz, por ser uma reta paralela ao eixo das ordenadas, a sua ordenada é qualquer y. Logo, tem-se:

$$x - x_v + a = \sqrt{(x-x_v-a)^2+(y-y_v)^2}$$

Fazendo:

$X = x - x_v$ e $\quad Y = y - y_v$

Tem-se:

$$X + a = \sqrt{(X-a)^2 + (Y)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$$(X + a)^2 = X^2 + 2aX + a^2 + Y^2$$

Cortando os elementos simétricos, temos:

$$2aX = -2aX + Y^2$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{y}^2 = 4\mathrm{aX}$$

Considerando as igualdades anteriores, temos:

$$(y - y_v)^2 = 4a(x - x_v)$$

Pela forma da equação, verifica-se que o eixo de simetria da curva é paralelo ao eixo das abcissas. Nesse sentido, há que considerar os seguintes casos:

- Se o foco estiver à esquerda da diretriz, a equação tem a seguinte forma:

  $\mathrm{y}^2 = -4\mathrm{aX}$ ou $(y - y_v)^2 = -4a(x - x_v)$

  Onde: $V = (x_v, y_v)$, $F = (x_v + a, y_v)$ e $l\colon x = x_v - a$ e o eixo de simetria é $y = y_v$

- Se o foco estiver sobre o eixo das ordenadas, a forma da equação seria:

  $\mathrm{X}^2 = \mp 4\mathrm{aY}$ ou $(x - x_v)^2 = 4a(y - y_v)$

  Onde: $V = (x_v, y_v)$, $F = (x_v, y_v + a)$ e $LL'\colon y = y_v - a$ e o eixo de simetria é $x = x_v$

Esse estudo nos levou a compreender que um estudo articulado entre a Geometria sintética e a analítica nos leva a ter um conhecimento ampliado sobre o estudo das cônicas, no sentido de compreendê-la tanto em sua materialidade geométrica quanto algébrica.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este trabalho apresenta um estudo da parábola motivado pelo corte de um cone de isopor com uma faca, no sentido de buscarmos compreender alguns rastros epistêmicos significativos que, por vezes, são deixados de lado quando a referida curva é estudada apenas à luz da Geometria Analítica.

Nesse sentido, o resultado da experiencia não só permitiu compreender a Matemática como uma obra humana e uma abstração da realidade objetiva, como permitiu obter uma possível resposta da questão colocada.

Nessa perspectiva, chegamos à conclusão de que uma das vias que possibilita compreender o estudo da parábola em sua materialidade geométrica e algébrica, com vista a termos consciência dos conhecimentos que estão na base da sua principal propriedade, fundamentalmente pelo fato de ser considerada lugar geométrico, passa pela promoção de um estudo articulado entre a perspectiva da Geometria sintética e a analítica. Pensamos que um estudo promovido nessa direção amplia o horizonte dos alunos no sentido de não pautarem esse estudo mediante a memorização de fórmulas prontas e acabadas.

REFERÊNCIAS

Boyer, C. B. **História da Matemática**. Edgard Blucher, São Paulo., 2003. 16

CASSELA, E. A. D. **Ensino da Geometria Analítica no contexto cultural do Cuito-Bié**. 2018. Dissertação de mestrado. Universidade da Beira Interior (Portugal).

CASSELA, E.; DE NASCIMENTO, R. Estudo da circunferência à luz dos princípios axiomáticos de rené descartes. Um olhar ao contexto de ensino-aprendizagem da Escola Superior Pedagógica do Bié (esp-bié). **Revista Eletrônica de Educação Matemática**, v. 15, p. 01-21, 2020.

DE ANDRÉ, M. E. D. A. O papel da pesquisa na articulação entre saber e prática docente. **Psicologia da Educação**, n. 1, 1995.

FREIRE, P. **Educação e mudança**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1979

RADFORD, L. **Teorias da objetivação**: uma perspectiva Vygostskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática. Ed. Livraria da Física, 2021.