ANÁLISE DE UMA QUESTÃO DE GEOMETRIA PLANA: UM OLHAR DO TEOREMA DE PITÁGORAS PELA PERSPECTIVA DO RACIOCÍNIO MATEMÁTICO

Thiago Emanuel Santos Goulart e Silva[1]
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP, campus Guarulhos, SP, Brasil

William Vieira[2]
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP, campus Guarulhos, SP, Brasil

Roberto Seidi Imafuku[3]
Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP, campus Guarulhos, SP, Brasil

Resumo
No presente artigo, analisamos a resposta de um estudante sobre uma questão que envolvia o resgate dos conhecimentos acerca do Teorema de Pitagoras e seus elementos algébricos e geométricos. Foram elaboradas duas questões de geometria plana, que foram aplicadas para alunos do ensino medio, dentre os quais, selecionamos um participante, para analisar a resposta que este apresentou para a primeira questão. Buscamos na literatura outros trabalhos que analisaram questões que envolviam o teorema de Pitágoras e as dificuldades que os estudantes apresentam em questões deste tipo. Para fundamentar nossa análise, utilizamos os processos do raciocínio matemático, em conexão com os pensamentos algébrico e geométrico. As análises indicam uma boa capacidade argumentativa do participante, que se valeu de muitos processos do raciocínio matemático, mas também revelam algumas dificuldades sobre o teorema e seus elementos algébricos e geométricos.
Palavras-chave: Raciocínio matemático, Pensamento algébrico, Teorema de Pitágoras, Geometria Plana, Pensamento Geométrico.

---

[1] Licenciando em Matemática e bolsista PIBIFSP pelo Instituto Federal de São Paulo - IFSP campus Guarulhos, Guarulhos, São Paulo, Brasil. Endereço para correspondência: Av. Sebastião Eugenio de Camargo, 82, Butantã, São Paulo, São Paulo, Brasil, CEP: 05360-010. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6330-1877. Lattes: http://lattes.cnpq.br/2149107814979279. E-mail: t.goulart@aluno.ifsp.edu.br.

[2] Doutor em Educação Matemática – UNIAN-SP. Docente e pesquisador do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores – CEPIN do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos, Guarulhos, SP, Brasil. Av. Salgado Filho, 3501 - Centro, Guarulhos - SP, 07115-000. E-mail: ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-5592-891X. Lattes: http://lattes.cnpq.br/6106510148543215. E-mail: wvieira@ifsp.edu.br.

[3] Doutor em Educação Matemática – UNIAN-SP. Docente e pesquisador do Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores – CEPIN do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos, Guarulhos, SP, Brasil. Av. Salgado Filho, 3501 - Centro, Guarulhos - SP, 07115-000. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4047-9533. Lattes: http://lattes.cnpq.br/7926295090638853. E-mail: roberto.imafuku@ifsp.edu.br.

1. INTRODUÇÃO

O teorema de Pitágoras é um dos mais famosos e utilizados teoremas matemáticos (Coelho, 2010). Este possui aplicações em diversas áreas, sendo estas internas a matemática, ou em outras áreas do conhecimento, como por exemplo a engenharia e a física. Para além de seus usos práticos, observa-se uma potencialidade no uso do teorema de Pitágoras para apresentar aos estudantes um primeiro vislumbre de abstrações e demonstrações matemática, que podem ser utilizadas para o desenvolvimento do raciocínio dedutivo, processo importante do raciocínio matemático (Santos, 2015; Ponte, 2022; Jeannotte e Kieran, 2017).

A partir de atividades que utilizem o teorema de Pitágoras, podemos trabalhar questões que busquem promover o raciocínio algébrico e o geométrico/visual (Ponte, 2006; Costa 2020). Atividades que buscam estabelecer este tipo de relação, entre o algébrico e objetos visuais, podem trazer benefícios para a aprendizagem e o entendimento de determinados conceitos matemático (Barbosa; Vale; Palhares, 2012; Mata-Pereira e Ponte, 2011).

Coelho (2010) tratou das diferentes formas com que o teorema de Pitágoras é abordado nas mais diversas áreas da Matemática e em outras ciências, como fisica e biologia. Também buscou na história da matemática as formas com que este teorema foi apresentado e demonstrado. Ele também elaborou duas estratégias para se ensinar o teorema de Pitágoras para alunos do 9º ano, e analisou como se davam suas respostas em questionários sobre os conteúdos ensinados.

Pereira, Couto e Costa (2016) e Vieira, Imafuku e Pereira (2019) realizaram pesquisas nas quais buscaram reconhecer quais as dificuldades e confusões que estudantes tinham a respeito do teorema de Pitágoras. Ambos os trabalhos buscam realizar uma análise de erro, para compreender, sob diferentes referenciais teóricos, quais são os erros mais comuns que os estudantes cometem ao resolver questões que necessitam do uso do teorema de Pitágoras.

Neste trabalho analisamos a resposta de um aluno sobre uma questão de geometria plana. Mais especificamente, uma que necessita do resgate de conhecimentos sobre o teorema de Pitágoras e suas propriedades algébricas e geométricas. No que segue, apresentamos os procedimentos metodológicas que foram utilizados para a coleta e análise da resposta dada pelo participante da pesquisa.

2. METODOLOGIA

Para este trabalho, foi realizado uma revisão de literatura sobre o raciocínio matemático e seus processos, juntamente com outros tipos de processos que estão ligados ao mesmo. Após esta revisão, elaboramos duas questões de geometria plana, com uma delas envolvendo o Teorema de Pitágoras, sendo esta a que discutiremos neste artigo. A atividade foi aplicada para 6 estudantes do ensino médio de uma instituição pública, sendo estes selecionados por serem voluntários de atividades de revisão de Matemática básica, que ocorriam fora dos horários regulares de aula e eram ministradas pelo primeiro autor, na mesma instituição de ensino em que os voluntários estudam. Neste artigo, analisamos a resposta que um dos participantes deu para uma das questões. Os responsáveis pelo participante assinaram o Termo de Compromisso Livre e Esclarecido (TCLE) e estes assinarma o Termo de Assentimento (TA). O voluntario será tratado por um pseudônimo para manter sua identidade em sigilo.

Para a análise da resposta, buscamos observar como este participante realizou o resgate dos conceitos de geometria plana, se os argumentos e justificativas constituíam um percurso lógico e coerente, e se as conjecturas produzidas eram validadas por seus argumentos (Stylianides; Stylianides, 2009).

A questão aplicada trata de um triangulo retângulo formado pelos lados de 3 quadrados, apresentando assim, de forma geométrica o teorema de Pitágoras (Figura 1). Esperávamos que o participante conseguisse realizar o resgate de alguns conceitos da geometria plana, como elementos do triângulo retângulo e as propriedades geométricas e algébricas do Teorema de Pitágoras. Era esperado também que ele fosse capaz de reconhecer que as áreas dos quadrados construídos sob os catetos somadas resultam na área A do quadrado construído sobre a hipotenusa. E, nesse sentido, conseguisse estabelecer uma relação algébrica e geométrica entre os elementos do Teorema de Pitágoras.

1--) (Canguru – 2020 (adaptada)): A figura a seguir apresenta três quadrados que formam um triangulo retângulo. Dois Quadrados possuem áreas iguais a 3cm² e 22cm². Determina a área A do terceiro quadrado. Explicite cada parte do raciocínio que você utilizou para chegar à resposta.

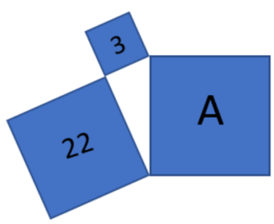


Figura 1 – Questão 1 sobre o Teorema de Pitágoras

Para além dos elementos destacados, também nos interessa avaliar como o participante argumenta e valida seus pensamentos, buscando assim analisar como justifica suas conjecturas (Vieira; Rodrigues; Serrazina, 2020; Stylianides e Stylianides, 2009).

3. REFERENCIAL TEORICO

Para este trabalho, adotamos a perspectiva do raciocínio matemático que entende este tipo de pensamento como uma série de processos, os quais envolvem a produção de inferências acerca de um dado problema. Estas inferências são produzidas a partir do resgate de conceitos matemáticos anteriormente adquiridos, buscando utilizá-los como ferramentas para justificar as conjecturas e decisões tomadas, e assim chegar a novas conclusões (Jeannotte; Kieran, 2017; Ponte, 2022).

Dentro da perspectiva adotada, Jeannote e Kieran (2017) evidenciam três tipos principais de pensamento que são inerentes ao raciocínio matemático: dedutivo, indutivo e abdutivo. O primeiro diz respeito a produção de inferências a partir do resgate das ferramentas matemáticas, as quais são usadas para fundamentar as conclusões deste pensamento. Os outros dois tipos tratam dos processos de generalização, produção de inferências a partir de semelhanças e observação de padrões entre objetos matemáticos distintos. Mais especificamente, o pensamento indutivo trata da análise de um caso específico, buscando encontrar semelhanças em outros casos para assim se estabelecer uma regra geral, enquanto o pensamento abdutivo surge a partir da observação de semelhanças e padrões, buscando produzir as primeiras conjecturas (Ponte, 2022; Jeannotte e Kieran, 2017)

Dentro da literatura, podemos observar outros tipos de pensamentos que também gozam dos processos inerentes ao raciocínio matemático. O pensamento algébrico e geométrico, são exemplos destes casos. O raciocínio algébrico, assim como a própria álgebra, compete-se de analisar e compreender as estruturas e as diferentes relações que estas estruturas e seus objetos exercem uma sobra a outra (Ponte, 2006). Este tipo de pensamento, trata das generalizações e a observação de padrões entre objetos matemáticos, importantes processo do raciocínio matemático, como afirmam Jeannotte e Kieran (2017) e Viera, Serrazina e Rodrigues (2020).

O pensamento geométrico, ou pensamento visual, trata principalmente dos entes abstratos da geometria e suas representações (Costa, 2020). O uso destas representações, articuladas com os objetos matemáticos da geometria, envolvem os processos de observação de padrões e classificação de objetos. Para que estudantes possam demonstrar o uso do raciocínio matemático, é necessário que estes saibam explicitar seus pensamentos, utilizando argumentos que justifiquem as inferências produzidas. (Viera *et al.*, 2020).

Ponte (2006) destaca a importância dos processos de justificação e generalização, pois entende que o saber argumentar matematicamente e o pensar genericamente são fundamentais para o desenvolvimento do raciocínio matemático. É a partir desses processos que os estudantes conseguem justificar as conjecturas produzidas e validá-las, para eles mesmos ou para outros indivíduos (Ponte, 2022; Viera *et al*, 2020).

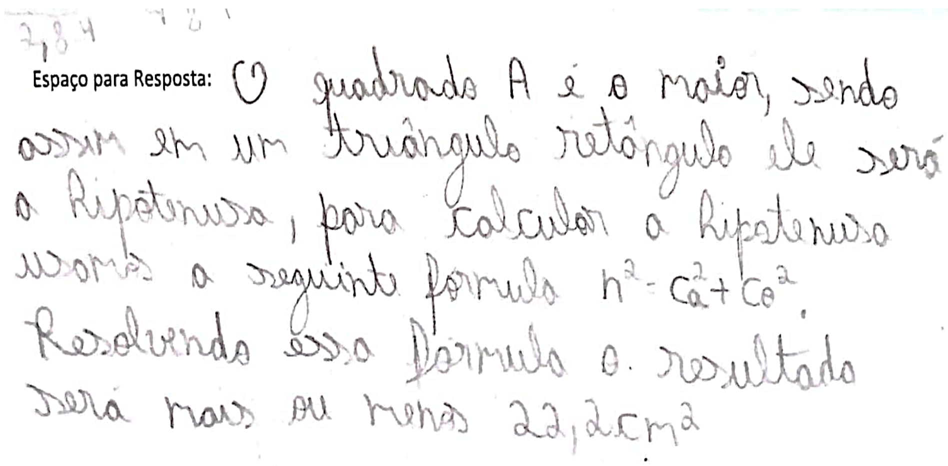
Para compreendermos como o raciocínio matemático é expresso pelos estudantes, precisamos analisar as representações que são utilizadas por eles, uma vez que "as representações constituem um elemento central no ensino-aprendizagem da Matemática e, consequentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático dos estudantes" (Mata-Pereira e Ponte, 2011, p.3). As representações serão compreendidas neste trabalho como sendo as diferentes formas com que os estudantes representam seus pensamentos, sendo estas, linguagem escrita, representações gráficas, ou de desenhos, expressões algébricas e figuras geométricas.

Entendemos que o uso de diferentes representações para um mesmo objeto indica uma habilidade em trabalhar diferentes conceitos a cerca de um mesmo objeto matemático (Mata-Pereira e Ponte, 2011), o que indica um uso mais vasto dos processos de generalizar e justificar (Viera *et al.,* 2020; Jeannote e Kieran, 2017).

No que segue, analisamos a resposta que Leticia deu para a questão 1, sob a luz do referencial teórico apresentado nesta seção. Leticia é o pseudônimo que será utilizado para preservar a identidade da participante da pesquisa.

4. ANÁLISE DA RESPOSTA DA QUESTÃO 1

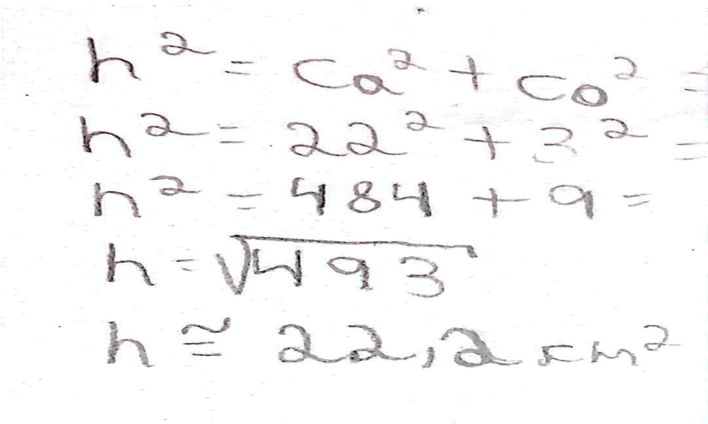
Em sua resolução, Leticia apresentou seus argumentos utilizando duas representações diferentes, sendo uma a conversão da outra (Mata-Pereira e Ponte, 2011). Como pode-se observar na Figura 2, uma das representações utilizadas foi a argumentação escrita. Nesta parte, ela reconhece alguns elementos importantes para resolução do problema, como o triângulo retângulo formado pelos quadrados e a relação entre o quadrado maior e a hipotenusa do triângulo. Ela também realiza o resgate dos conceitos do teorema de Pitágoras, o que usa para calcular o valor de A (área do quadrado).



Espaço para Resposta: O quadrado A é o maior, sendo assim em um triângulo retângulo ele será a hipotenusa, para calcular a hipotenusa usamos a seguinte formula $h^2 = ca^2 + co^2$. Resolvendo essa formula o resultado será mais ou menos 22,2cm²

Figura 2 – Primeira parte da resposta de Leticia

Neste ponto de sua argumentação, pode-se observar uma certa confusão ou uma falta de conhecimento entre a relação algébrica do teorema de Pitágoras e seus elementos geométricos. Leticia aplica o teorema (Figura 3) sem perceber que bastava somar os valores dados no enunciado, uma vez que estes indicam as áreas dos quadrados construídos sob os lados do triângulo.



$$h^2 = ca^2 + co^2$$
$$h^2 = 22^2 + 3^2$$
$$h^2 = 484 + 9$$
$$h = \sqrt{493}$$
$$h \cong 22{,}2\ cm^2$$

Figura 3 – Segunda parte da resposta de Leticia

Os cálculos apresentados se mostram coerentes com o que ela traz em sua argumentação escrita, estabelecendo assim, uma relação entra a representação escrita e a algébrica. Esta transformação, mostra novamente, a habilidade da participante em utilizar diferentes formas de argumentação, para validar suas inferências (Mata-Pereira e Ponte, 2011; Ponte, 2022; Vieira *et al.,* 2020).

5. CONCLUSÕES

De forma geral, Leticia consegue apresentar um bom nível de argumentação, conseguindo resgatar os conhecimentos necessários para resolução do problema. Porém, semelhante ao que constataram Vieira, Imafuku e Pereira (2019), a participante pode não ter aprendido de forma adequada o teorema de Pitágoras. A falta de conhecimento acaba gerando confusões e fazendo com que ela não perceba a relação implícita entre os lados do triângulo e os quadrados gerados sob os mesmos, produzindo, assim, inferências incorretas. Porém, mesmo chegando a um resultado incorreto, evidencia o uso do raciocínio matemático. Os processos utilizados por ela são os de justificação e validação, processos fundamentais do raciocínio matemático (Jeannotte e Kieran, 2017; Viera *et al*, 2020; Stylianides e Stylianides, 2009).

Para além dos processos do raciocínio matemático, podemos observar também o uso do pensamento algébrico, evidenciado tanto pela justificativa escrita em língua materna quanto pela equação montada na resposta (Figura 3). Por outro lado, constatamos uma confusão no que diz respeito aos elementos geométricos do teorema de Pitágoras. Está falta de correlação entre estes elementos, possivelmente gera essa confusão e faz com que o estudante chegue a uma inferência incorreta. A falta de clareza sobre estes elementos mostra uma necessidade de se ensinar o teorema de Pitágoras estabelecendo relações entre as diferentes representações. Concordamos, assim, com Mata-Pereira e Ponte (2011), quando estes tratam da necessidade de se trabalhar com formas diversificadas de representações de um mesmo objeto para que os estudantes compreendam de fato o objeto matemático trabalhado.

Percebemos, que mesmo o teorema de Pitagoras sendo um dos mais famosos teoremas, tendo diversas aplicações e inúmeras demonstrações, este ainda é um conceito que está nebuloso para os estudantes. Possivelmente, o modo com que ele é apresentado e desenvolvido em sala de aula não faz com que os estudantes relacionem as diferentes representações do mesmo objeto. Necessitando assim, de novas abordagens e atividades que busquem transformar a forma com que os estudantes aprendem o teorema de Pitágoras, buscando incentivá-los a transitar entre diferentes representações, para assim interiorizar este conhecimento

REFERÊNCIAS:

BARBOSA, A; VALE, I; PALHARES, P. Pattern Tasks: Thinking processes used by 6th grade students. **Revista Latinoamerica de investigación em Matemática Educativa**, RELIME, n. 15(3), p 273-293, 2012. Disponível em: https://www.redalyc.org/pdf/335/33524579002.pdf

COELHO, A. B. **Teorema de Pitágoras**: qual a sua importância para o ensino das ciências da natureza ?. Dissertação (Mestre em ensino de Ciências na Educação Básica) - Universidade do Grande Rio. Duque de Caxias. p. 88. 2010.

COSTA, A. P. Pensamento geométrico: em busca de uma caracterização à luz de fischbein, duval e pais. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, v. 9, n. 18, p.

152–179, 2020. Disponível em: https://periodicos.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/view/6187. Acesso em: 23 jan. 2024.

JEANNOTTE, D; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Nature, n. 96(3), p 1-16, 2017. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/316789539_A_conceptual_model_of_mathematical_reasoning_for_school_mathematics

MATA-PEREIRA, J; PONTE, J. P. Raciocínio matemático em contexto algébrico: uma análise com estudantes do 9º ano. In: Encontro de investigação em educação matematica. **Anais** eletrônicos do EIEM - Encontro de investigação em educação matemática, 2011. Disponível em: https://cmup.fc.up.pt/cmup/eiem/grupos/documents/20.Pereira%20e%20Ponte.pdf .

PEREIRA, M. G. G; COUTO, A. P. N; COSTA, A. C. Análise de erros em questões de teorema de Pitágoras: Um estudo com estudantes do Ensino Fundamental. In: Educação Matemática na Contemporaneidade. **Anais** eletrônicos do ENEM - Educação Matemática na Contemporaneidade, 2016. Disponível em: https://www.sbem.com.br/enem2016/anais/pdf/5481_4329_ID.pdf

PONTE, J. **Números e álgebra no currículo escolar**, Researchgate, 2006. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/237365684_Numeros_e_algebra_no_curriculo_escolar

PONTES, J. P. da. Projeto REASON: **Raciocínio matemático e formação de professores**. 1° edição, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, 2022. E-book

SANTOS, M. C. et al. Elaborando saberes matemáticos para conjecturar o teorema de Pitágoras. In: II Congresso nacional de educação. **Anais** eletronicos do II CONEDU - II Congresso nacional de educação. 2015. Disponível em: https://editorarealize.com.br/artigo/visualizar/15929

STYLIANIDES, A. J; STYLIANIDES, G. J. Proof constructions and evaluations. **Educational Studies in Mathematics**, Springer Nature, n 72(2), p 237-253, 2009. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/227008878_Proof_constructions_and_evaluations

VIEIRA, W; IMAFUKU, R. S; PEREIRA, E. F. M. Uma análise da resolução de questões sobre o Teorema de Pitágoras. ForScience: **revista científica do IFMG**, Formiga, v. 7, n. 2, 2019. Disponível em: https://forscience.ifmg.edu.br/index.php/forscience/article/view/552

VIEIRA, W; RODRIGUES, M; SERRAZINA, L. O conhecimento de futuros professores sobre os processos de raciocínio matemático antes e depois de uma experiência de formação. **Quadrante**, n 29(1), p 8–35, 2020. Disponível em: https://quadrante.apm.pt/article/view/23012