INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
SÃO PAULO
Campus Guarulhos

XI SEMAT
SEMANA DA MATEMÁTICA
IFSP GUARULHOS
2022

INTEGRAÇÃO NUMÉRICA - ESTUDO TEÓRICO E IMPLEMENTAÇÃO DAS FÓRMULAS DE QUADRATURA DE NEWTON-COTES E DE GAUSS

Gabriel Barbosa Stanczyk
IFSP-Guarulhos
Gabrielbstanczyk@terra.com.br

Armando Handaya
IFSP-Guarulhos
ahand@ifsp.edu.br

RESUMO

Este relatório compila resumidamente todos os tópicos estudados e os caminhos utilizados afim de documentar os estudos realizados pelo autor um e supervisionado pelo coautor, passando primeiramente pelo estudo de interpolação e seus métodos como o de Lagrange e Newton-Gregory depois pelo estudo da integração numérica pelos métodos de Newton-Cotes e também pelos erros tanto na interpolação quanto o erro nas integrais pelos métodos de NewtonCotes. Neste relatório compilam-se parte dos estudos sobre polinômios ortogonais clássicos, e a quadratura de Gauss

Palavras chave: Calculo numérico. Interpolação. Integração numérica. Quadratura de Gauss.

INTRODUÇÃO

O relato a seguir corresponde aos resultados finais da pesquisa de iniciação cientifica. Após aprovação para desenvolvimento da investigação, com bolsa do IFSP, e autorização do professor, e de acordo com o cronograma, houve o planejamento e entrega de seminários e apresentações, assim como o levantamento bibliográfico sobre os seguintes tópicos: Estudo dos fundamentos matemáticos para interpolação polinomial de Lagrange e de Newton-Gregory, estudo das fórmulas de erros dos métodos de Newton-Cotes, implementação das fórmulas em plataforma de cálculo técnico, estudos da linguagem de programação C, implementação das fórmulas na linguagem de programação, estudo dos fundamentos matemático para a quadratura de Gauss e estudo dos fundamentos matemáticos do espaço de polinômios ortogonais.

Tanto nas referências quanto durante o discorrer do texto será evidenciado um link para acesso do powerpoint utilizado para apresentação dos estudos, para uma melhor compreensão do leitor.

FUNDAMENTOS MATEMATICOS PARA INTERPOLAÇAO POLINOMIAL DE LAGRANGE E DE NEWTON-GREGORY

Como base para iniciar os estudos da iniciação cientifica, levei em conta apresentações já realizadas sobre cada tema. Como o primeiro assunto do projeto já se trata de um conhecimento mais avançado então precisei primeiro entender e compreender os conceitos de interpolação polinomial e para quais situações servia, para aí sim depois ir mais avante e estudar seus métodos específicos. A interpolação vem para resolver situações que o ajuste de curvas não consegue determinar uma função que passa exatamente por uma nuvem de pontos dadas, pode até ser a melhor curva que a defina, mas não necessariamente passa por eles.

Na interpolação você descobre uma função que passa exatamente pelas pontos dados e para pontos próximos não dados achamos uma boa estimativa e dependendo do caso achamos realmente a função exata, essa técnica serve justamente para casos onde não temos a função original, seja porque essa função não nos é dada ou ela é muito extensiva ou falta alguns pontos, entre outras dificuldades, e por isso a interpolação tem quatro conceitos básicos : consertar a continuidade de uma função, reconstruir uma função, estimar uma função e por fim simplificar uma função. Os métodos de interpolação estudados foram o Lagrange e o método de Newton-Gregory.

Fundamentos matemáticos para a Integração Numérico pelo Método de Newton-Cotes: a Regra de Trapézios e as de Simpson.

Partindo para o próximo tópico, então, entramos na integração numérica que tem como objetivo aproximar o valor de uma integral. Esse método é útil nas situações que não temos como obter o valor da integral pelo método analítico. Por exemplo em casos em que a função a ser integrada não possui uma primitiva elementar ou possui, mas ela é muito complicada de se trabalhar. Assim como o titulo de seção nos diz os métodos estudados nesse tópico são a regra dos trapézios e a primeira e segunda regra de Simpson.

Estudo das fórmulas de Erros dos Métodos de Newton-Cotes

Um tópico que quase comentei no primeiro capitulo foi a de que o polinômio interpolador em situações especificas é a própria função, entretanto isso não vale para todos os casos, o fato é que na maioria deles a interpolação vai ser uma aproximação ou reconstituição da função significando que não ela de fato. Novamente citando o primeiro parágrafo do capitulo um o polinômio interpolador tem como uma das principais funções reconstituir uma função que não nos foi dado então como fazer para achar o erro. O erro na regra do trapézio pode ser obtido integrando o erro da interpolação de Lagrange, oque também funciona para a regra do trapézio composta.

O teorema do resto de Lagrange diz que o erro se encontra entre as extremidades, então em muitos dos casos é difícil precisar o erro pois não sabemos onde ele de fato está. Podemos então podemos calcular o erro máximo para ter uma base se estamos seguindo um caminho correto. Sabendo disso então usamos o valor máximo da derivada para saber o maior erro que pode ser cometido.

Implementação das fórmulas em plataforma de cálculo técnico

Este tópico existe para mostrar o caminho seguido para criar uma ferramenta no Excel que faz o cálculo “automaticamente” pela plataforma do Excel usando código de programação VBA.

Estudo dos fundamentos matemático para a Quadratura de Gauss

Uma Quadratura é um nome matemático histórico que tem como significado calcular área. Então na Formula da Quadratura de Gauss usaremos uma expressão para conseguir calcular áreas, e para chegarmos em tal formula desenvolvida por Gauss precisamos partir da expressão de quadratura numérica, a formula abaixo:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} A_i\, f(x_i)$$

Onde Ai são coeficientes reais também chamados na quadratura por pesos, xi são pontos de [a,b] também chamados na quadratura por nós (plural de nó). Especificamente estamos interessados em estudar a fórmula de Quadratura de Gauss. Uma regra de quadratura gaussiana de n pontos, chamada assim em homenagem a Carl Friedrich Gauss, é uma regra de quadratura construída para produzir um resultado exato para polinômios de grau 2n – 1 ou menor para uma escolha adequada dos pontos xi e pesos wi para i = 1,...,n. Na apresentação todo o resto da quadratura é desenvolvida com cálculos que não calham de se envolver neste resumo.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Dentro das discussões previstas tópico a tópico se deram estas conclusões:
- Considerações importantes em vista da visão geométrica por exemplo, por dois pontos passa uma única reta, por três somente uma parábola, por quatro uma única cúbica e assim por diante. Assim não importa o método utilizado para encontrar o polinômio seja Lagrange ou Newton-Gregory o resultado é o mesmo polinômio, como pode observar no método de Newton e no método de Lagrange onde foi utilizado os mesmos pontos. Outro ponto estritamente importante é o de que caso os pontos usados para fazer o polinômio sejam de uma função polinomial, o polinômio que será calculado nos levará à função original. Neste caso a interpolação gera valores corretos da função. Assim um polinômio de grau zero nos gera os valores corretos de uma função constante, um polinômio de grau um gera os valores corretos de uma função afim e assim por diante.
- Falando sobre a precisão das integrais numéricas temos que tanto na primeira quanto na segunda regra de Simpson a ordem de precisão vai ser a mesma porque ambos precisam da quarta derivada. E como calcular a integral com apenas três pontos é mais fácil que calcular com quatro pontos e ambas têm a mesma ordem de precisão, é mais cômodo utilizar a primeira regra de Simpson na maioria dos casos.
- Na quadratura de Gauss temos dois importantes pontos a serem citados, o primeiro é que como vimos então para cada ponto trabalhado na quadratura de Gauss temos duas variáveis: o peso (An) e o próprio ponto/nó (xn). Então a quantidade n de pontos nos leva a 2n variáveis. Para obtermos os valores únicos para tais variáveis e que valida essa

igualdade, e como temos que trabalhar com o espaço polinomial de grau 2n-1. Isso porque esse espaço tem dimensão 2n, que é o número de coeficientes do polinômio. O segundo importante tópico é o de que podemos trabalhar com limites fixos de a e b (1 e -1) apenas fazendo uma mudança de base para trabalhar com a quadratura de Gauss de forma mais usual e facilitada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Todo o meu trajeto no projeto de iniciação cientifica se pudesse se resumir em uma palavra seria desafiador, tanto por se tratar de um tema onde eu não tinha muito conhecimento prévio sobre o assunto outro tanto por ter sido realizado totalmente remoto e por fim também pela dificuldade de documentar grande parte dos estudos.

Creio que um dos trabalhos mais importes que vieram a me fazer concluir a iniciação cientifica foi a persistência do professor orientador que identificou minhas dificuldades não só de documentar os estudos realizados, mas também a de constantemente melhorar a escrita para que um leigo mesmo que não aprenda conseguir entender o raciocínio utilizado para uma melhor leitura.

Por fim devo salientar que todo o processo de investigação tendo uma base norteadora teve muita estranheza de minha parte, pois em muitos tópicos eu não conseguia desenvolver de uma forma que ao meu ver ficaria natural, como por exemplo o tópico de espaços polinomiais que ficou de fora deste resumo.

REFERÊNCIAS

https://homepages.dcc.ufmg.br/~nivio/cursos/pa02/seminarios/seminario6/seminario6.html

https://www.youtube.com/watch?v=mHdm11rt7mY

https://drive.google.com/file/d/1udUeUVtJjveY7oB8ecQ8xVVS0Q1ctgd6/view

https://www.youtube.com/watch?v=tf2zKz8FVzU

https://drive.google.com/file/d/1-ZS3ih9jBxIjQa-Wmwpiw0zRW7WQebHr/view

https://drive.google.com/file/d/1436G_XCpCvk2ypFjUFXR5rR_zO-80aVv/view

https://drive.google.com/file/d/1K-Q86OwMvIN0HINZwJ5Ik7gaYviyTzmi/view https://labcn-uefs.webnode.com/ https://sites.google.com/alumni.usp.br/ahand1/calnum

https://www.youtube.com/watch?v=2aiznhVdxyM

https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/MS211/Aula18.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=qdBE9idSiqQ

https://www.ime.unicamp.br/~valle/Teaching/2015/MS211/Aula20.pdf

https://www.ime.unicamp.br/~biloti/an/211/eqn-05.html

https://www.youtube.com/watch?v=tEnZA9I2yBw

https://www2.dbd.puc-rio.br/pergamum/tesesabertas/1213318_2014_cap_3.pdf

https://www.youtube.com/watch?v=OHvp877EeN0