ESTUDANDO CURVAS DEFINIDAS QUANDO ENROLAMOS OU DESENROLAMOS UM CILINDRO NO PLANO: UMA APRENDIZAGEM EM CONTEXTO NA PERSPECTIVA DA MATEMÁTICA REALÍSTICA

Ezequias Adolfo Domingas Cassela
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
ezequiasadolfo@hotmail.com

RESUMO

O presente estudo explorou um resultado matemático apresentado por Apostol (2012), em seu livro *New horizonte in Geometry*, com o objetivo de estudar curvas definidas em cilindros, quando são enrolados e desenrolados, usando artefatos de contexto. Para tal, foi escolhida a abordagem relacionada com a Matemática Realística de Hans Freudenthal (1905-1990). A pergunta que norteou o estudo é: a aprendizagem de conteúdos científicos a um nível de pós-graduação pode ser mediada por artefatos do cotidiano? Os resultados obtidos mostram que a matemática está enraizada nas práticas do dia-a-dia e determinados objetos podem ser mobilizados como artefatos para a sua aprendizagem.

Palavras chave: Curvas definidas em cilindros. Matemática realística. Artefatos de contexto.

1. INTRODUÇÃO

Em um estudo sobre Matemática motivada pelo contexto cultural do Cuito-Bié, em Angola, desenvolvido pelo autor deste trabalho, no âmbito da sua dissertação de mestrado, apresentada e defendida na Universidade da Beira Interior, Portugal, foi escolhido o referencial teórico da Matemática Realística desenvolvida pelos professores Holandeses inspirados nas ideias de Hans Freudenthal (1905-1990) entre o final da década de 1960 e começo dos anos de 1970. No estudo feito colocou-se a seguinte questão: a aprendizagem de conteúdos científicos a um nível de pós-graduação pode ser mediada por artefatos do cotidiano? Para este efeito foi estudado um resultado enunciado no capítulo 6 do livro "New Horizons in Geometry (2012), que se propõe responder a duas questões: O que acontece com a forma de uma curva desenhada na superfície de um cilindro quando desenrolamos o cilindro em um plano? Quando desenhamos um segmento de reta num papel ou num tecido qualquer e enrolamos em volta de cilindros de raios diferentes, qual é a configuração da curva vista de diferentes direções?

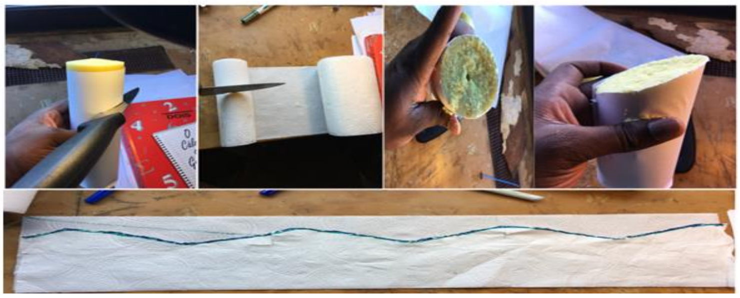
2. RESPONDENDO AS QUESTÕES USANDO ARTEFATOS DE CONTEXTO

Começando por analisar a situação imposta pela primeira questão. Se quer fazer o estudo da curva que resulta da interseção de um plano com um cilindro de base circular escolhendo para o plano uma inclinação que faça um ângulo β, com $0 < \beta < \pi/2$ paralelo ao da curva diretriz (circunferência de raio r).

2.1 Desenrolar curvas de cilindros

Enrolou-se uma folha de papel de cozinha a uma vela cilíndrica, e cortou-se obliquamente com uma faca. A seção oblíqua obtida é uma elipse. Vamos analisar a forma que a curva resultante da seção oblíqua toma quando é desenrolada.

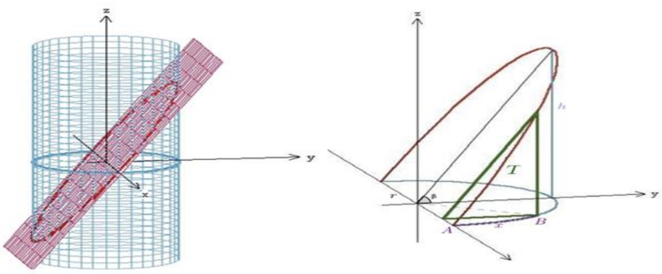
Figura 1 - Papel de cozinha enrolada numa vela cilíndrica



Fonte: Própria

Parece ser uma curva sinusóide. Consideremos agora a seguinte representação que ilustra a interseção do plano de corte com o diâmetro de uma seção circular paralela à diretriz de um cilindro de raio r (1ª imagem da Figura 2). Se fizermos um corte vertical por um plano paralelo ao eixo maior da elipse, como mostra a figura da direita, a interseção com a cunha cilíndrica será um triângulo retângulo T com outro ângulo da base β.

Figura 2 - Interseção do plano de corte com o diâmetro



Fonte: Própria

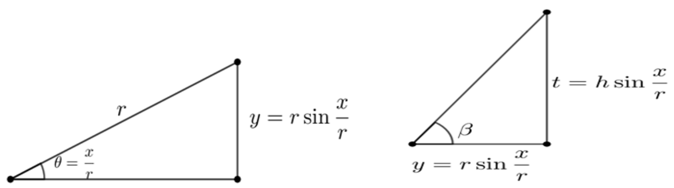
Mostraremos de seguida que o triângulo T, ilustrado na figura da direita, tem base com comprimento $r\sin\frac{x}{r}$ e altura $h\sin\frac{x}{r}$:

Nos passos que se seguem, mostraremos porque é que o comprimento da base de T é $r\sin\frac{x}{r}$ e a sua altura é $h\sin\frac{x}{r}$. Comecemos por demonstrar o comprimento da base de T. Seja θ o ângulo que subentende o arco AB cujo cumprimento é x, e y o comprimento da base de T e cateto oposto do triângulo retângulo inscrito no sector semicircular da base com vértice na origem. Buscando uma relação entre θ e x sabendo que θ está para 2π e x está para $2\pi r$ temos:

$$\frac{\theta}{2\pi}=\frac{x}{2\pi r}\Leftrightarrow \mathrm{x}=\theta r\Leftrightarrow \theta=\frac{x}{r}$$

Analisando o triângulo inscrito no setor circular e consideremos t como a altura do triângulo T (semelhante ao triângulo com a altura $h\ >$ t, pelo critério AA), com a base $\sin\frac{x}{r}$, temos:

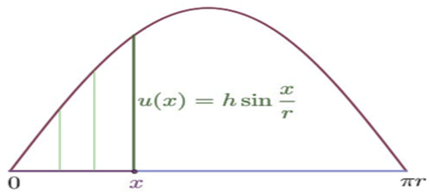
Figura 3- triângulo inscrito na base com o vértice na origem (1º) e triângulo T (2º)



Fonte: Própria

Ainda é possível verificar que quando desenrolamos a parede do cilindro num plano, a base semi-circular desenrola-se num segmento de reta que consideramos estar no eixo x. Na seguinte figura, adaptada do referido autor, mostra-se a configuração da porção da parede do cilindro limitada pelo arco de circunferência de medida x, pelo cateto oposto de cada triângulo T e pela curva da elipse, quando desenrolada no plano.

Figura 4- Parede do cilindro desenrolada ao logo do eixo x



Fonte: Elaborado no Geogebra

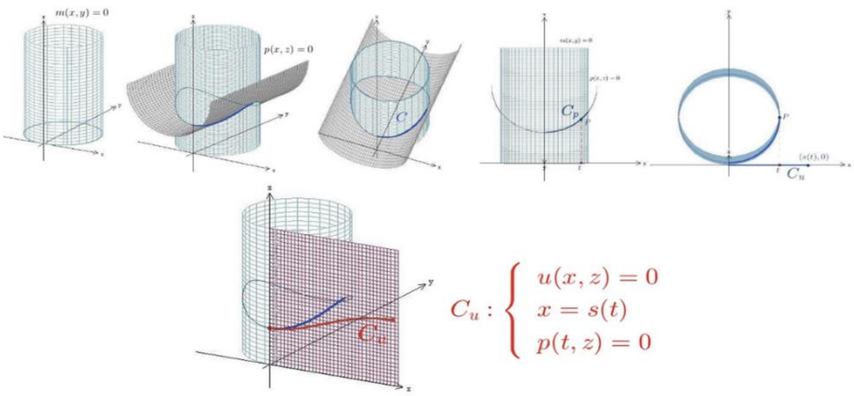
O que quer dizer que a curva desenrolada é o gráfico de $u(x) = hsin\frac{x}{r}$. Isto leva a concluir que quando se desenrola cilindros, a função representada é uma função seno.

Quanto à segunda questão, que inclui a visualização numa parede cilíndrica no espaço de uma reta desenhada no plano e enrolada à volta do cilindro, apresentamos uma ilustração do seguinte Teorema:

Num cilindro circular direito do raio r, seja C uma curva na parede do cilindro definida pelo perfil Cp de um cilindro de corte horizontal e seja Cu sua imagem desdobrada. Então, a equação do perfil $p\,(t,z) = 0$ para Cp e a equação de desdobragem $u(x,z) = 0$ para Cu estão relacionados por:

$$u(x,z) = p\left(rsin\frac{x}{r}, z\right), \qquad p(t,z) = u\left(r\, arcsin\frac{t}{r}, z\right)$$

Figura 5- Parede do cilindro desenrolada ao logo do eixo x



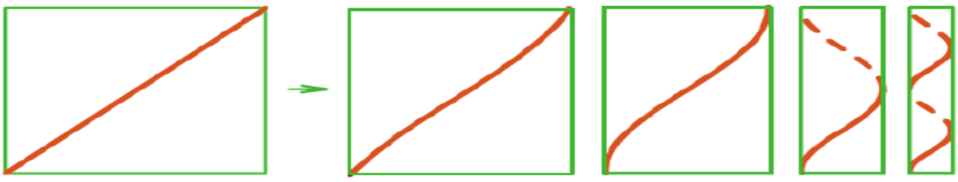
Fonte: Elaboração do autor

Se θ for o ângulo de rotação do cilindro vertical, então $t = rsin\theta$. O comprimento de arco que une a origem a cada ponto de C é dado por $s(t) = x = r\,\theta = arcsin\frac{t}{r}$.

Exemplo:

Um segmento de reta num cilindro circular fica definido pela função $u(x) = cx$ e enrola-se num arco geodésico na superfície do cilindro. O perfil deste arco geodésico faz parte de uma curva de arco-seno como mostra a seguinte figura (segmento de reta enrolado no cilindro).

Figura 6 – Segmento desenhado num papel enrolado no cilindro



Fonte: Apostol (2012).

3. METODOLOGIA

O presente estudo trata-se de uma pesquisa bibliográfica, que de acordo com Gil (2002, p. 3), “é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”.

4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo procurou estudar curvas definidas em cilindros, quando são enrolados e desenrolados, usando artefatos de contexto na perspectiva da Matemática Realística de Hans Freudenthal. As experiências inerentes as equações e transformações geométricas bidimensionais inspiradas em Apostol, permitem contextualizar conteúdos científicos a um nível de pós graduação por meio de artefatos de contexto.

5. REFERÊNCIAS

APOSTOL, Tom. **New Horizonte in Geometry. Washington DC**: The Mathematical Association of America. 2012.

FREUDENTHAL, Hans. Why to teach Mathematcs so as be usefull. ***Educational Studies in Mathematics*,** 1991, 1(1), 3-8.

GIL, Antônio Carlos. "Como classificar as pesquisas." Como elaborar projetos de pesquisa **4.1 (2002): 44-45.**